

Проективная классификация рациональных функций

Коновенко Н.

(Кафедра высшей и прикладной математики, ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail: konovenko@ukr.net

Рассматриваем группу Галуа $Aut(\mathbb{C}(z)/\mathbb{C})$, которая изоморфна группе Ли $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ и преобразования Мёбиуса имеют вид

$$f(z) \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc = 1$.

Представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в векторных полях на $\mathbb{CP}^1$ имеет вид: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle \partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z \rangle$.

Пусть $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - векторное поле из алгебры. Обозначим через $X^{(k)}$ продолжение этого векторного поля на многообразии k -джетов $\mathbf{J}^k$ функций. Тогда соответствие $X \mapsto X^{(k)}$ даёт представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в векторных полях на $\mathbf{J}^k$.

Например, взяв $k = 3$, мы получаем следующую реализацию алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} &\partial_z, z\partial_z - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - 3u_3\partial_{u_3}, \\ &z^2\partial_z - 2zu_1\partial_{u_1} - (4zu_2 + 2u_1)\partial_{u_2} - (6zu_3 + 6u_2)\partial_{u_3}, \end{aligned}$$

в стандартных координатах.

Мы говорим, что рациональная функция F на многообразии $\mathbf{J}^k$ является проективным дифференциальным инвариантом порядка $\leq k$ ([1], [2], [3]), если $X^{(k)}(F) = 0$, для всех векторных полей $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Теорема 1. (1) *Существует два независимых проективных дифференциальных инварианта порядка ≤ 3*

$$J_0 = u, J_3 = u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_1^{-4}u_2^2,$$

и все остальные инварианты порядка ≤ 3 являются рациональными функциями J_0 и J_3 .

(2) *Эти инварианты разделяют регулярные орбиты, т.е. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты точек, где $u_1 \neq 0$.*

Отметим, что

(1) Значение инварианта J_3 на рациональной функции $f(z)$ равно производной Шварца функции, обратной к $f(z)$.

(2) Регулярные $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в $\mathbf{J}^3$ имеют размерность 3. Есть также особые орбиты размерности 3, они $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в области $u_1 = 0, u_2 \neq 0$.

(3) Сингулярные орбиты размерности 2 являются $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбитами в области $u_1 = u_2 = 0, u_3 \neq 0$.

(4) Сингулярные орбиты размерности 1 являются $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбитами в области $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

(5) Сингулярные орбиты размерностей 3, 2 и 1 соответственно задаются уравнениями:

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

где c константа.

Теорема 2. (1) Поле проективных дифференциальных инвариантов порождается инвариантами J_0 , J_3 и производной Трессе $\nabla = \frac{1}{u_1} \frac{d}{dz}$, т.е. любой проективный дифференциальный инвариант является рациональной функцией инвариантов J_0 , J_3 и их инвариантных производных.

(2) Это поле разделяет регулярные $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в пространствах джетов, где регулярность орбиты в $\mathbf{J}^k$, $k > 3$, означает, что ее проекция в $\mathbf{J}^3$ регулярная орбита.

Чтобы описать $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в $\mathbb{C}(z)$ отметим, что значения $J_0(f)$ и $J_3(f)$ базисных дифференциальных инвариантов J_0 , J_3 на рациональной функции $f(z)$ также рациональные функции.

Степень трансцендентности поля $\mathbb{C}(z)$ равна 1, и поэтому идеал полиномиальных соотношений

$$P(J_0(f), J_3(f)) = 0 \quad (1)$$

между ними порождается неприводимым полиномом.

Коэффициенты последнего полинома зависят от f , поэтому мы будем обозначать соответствующий неприводимый многочлен $P_f(X, Y)$. Тогда соотношение (1) можно рассматривать как утверждение, что f является решением обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка:

$$\varepsilon_f = \left\{ P_f \left(u, u_1^{-3} u_3 - \frac{3}{2} u_1^{-4} u_2^2 \right) = 0 \right\} \subset J^3.$$

Проективная группа $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$ является группой симметрий дифференциального уравнения ε_f и, следовательно, действует на его пространстве решений.

Теорема 3. Стабилизатор рациональной функции $h(z)$ для $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$ - действия дискретен, если $h \neq \text{const}$.

Мы говорим, что рациональная функция $h(z)$ является *регулярной*, если $h \neq \text{const}$.

Например, стабилизатор функции Жуковского $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$ является группой $\mathbb{Z}_2$, порождённой инверсией $z \mapsto z^{-1}$.

Теорема 4. Две регулярные рациональные функции f и g являются $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда $P_f = \lambda P_g$.

Отметим, что для трансцендентных расширений поля $\mathbb{C}$ дифференциальные инварианты, а также соответствующие дифференциальные уравнения играют роль неприводимых многочленов для конечных расширений Галуа.

Так например для функции Жуковского $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$

$$P_f(X, Y) = (X^2 - 1)^2 Y + \frac{3}{8},$$

а соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$(u^2 - 1)^2 \left(u_1 u_3 - \frac{3}{2} u_2^2 \right) + \frac{3}{8} u_1^4 = 0.$$

Все регулярные решения этого уравнения являются рациональными функциями, которые $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{C})$ -эквивалентны функции Жуковского.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.
- [2] N. Kononenko, V. Lychagin. Projective classification of rational CP1-mappings // Anal.Math.Phys. (2019), 12p. <https://doi.org/10.1007/s13324-019-00281-2>
- [3] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces // An. Acad. Brasil. Ci., **35**, (1963), 487–489.
- [4] A. Tresse. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math., **18**, (1894), 1–88.